О задачах с параметром

Первоначальные сведения

I. Что такое параметр?

Если вы вспомните некоторые основные уравнения (например, $kx+l=0$, $ax^2+bx+c=0$), то обратите внимание, что при поиске их корней значения остальных переменных, входящих в уравнения, считаются фиксированными и заданными. Все разночтения в существующей литературе связаны с толкованием того, какими фиксированными и заданными могут быть эти значения остальных переменных.

Например, в уравнениях $|x|=a-1$ и $ax=1$ при $a=0$ равенства не выполняются при любых значениях переменной x, а в уравнения $\frac{x}{a}=2$ и $\sqrt{a-1}=x^2$ при $a=0$ их левые части не определены. Есть авторы, допускающие рассмотрение значения $a=0$ во всех приведенных случаях, и есть авторы, исключающие его в двух последних, вводя понятие допустимых значений переменной a.

Поскольку в школьных учебниках нет определения параметра, мы предлагаем взять за основу следующий его простейший вариант.

Определение. Параметром называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Комментарий. Независимость параметра заключается в его «неподчинении» свойствам, вытекающим из условия задачи. Например, из неотрицательности левой части уравнения $|x|=a-1$ не следует неотрицательность значений выражения $a-1$, и если $a-1<0$, то мы обязаны констатировать, что уравнение не имеет решений.

II. Что означает «решить задачу с параметром»?

Естественно, это зависит от вопроса в задаче. Если, например, требуется решить уравнение, неравенство, их систему или совокупность, то это означает предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству.

Если же требуется найти значения параметра, при которых множество решений уравнения, неравенства и т. д. удовлетворяет объявленному условию, то, очевидно, решение задачи и состоит в поиске указанных значений параметра.

Более прозрачное понимание того, что означает решить задачу с параметром, у читателя сформируется после ознакомления с примерами решения задач на последующих страницах.

III. Какие основные типы задач с параметрами?

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами», поскольку вложенный труд предопределяет успех и при решении задач всех других основных типов.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Обращаем внимание на то, что при решении задач данного типа нет необходимости ни решать заданные уравнения, неравенства, их системы и совокупности и т. д., ни приводить эти решения; такая лишняя в большинстве случаев работа является тактической ошибкой, приводящей к неоправданным затратам времени. Однако не стоит абсолютизировать сказанное, так как иногда прямое решение в соответствии с типом 1 является единственным разумным путем получения ответа при решении задачи типа 2.

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Легко увидеть, что задачи типа 3 в каком-то смысле обратны задачам типа 2.

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;
2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т. д.

Комментарий. Многообразие задач с параметром охватывает весь курс школьной математики (и алгебры, и геометрии), но подавляющая часть из них на выпускных и вступительных экзаменах относится к одному из четырех перечисленных типов, которые по этой причине названы основными.

Наиболее массовый класс задач с параметром — задачи с одной неизвестной и одним параметром. Следующий пункт указывает основные способы решения задач именно этого класса.

IV. Каковы основные способы (методы) решения задач с параметром?

Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Комментарий. По мнению авторов, аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром *a*) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x; y), или в координатной плоскости (x; *a*).

Комментарий. Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметром», что они начинают игнорировать другие способы решения, забывая общеизвестный факт: для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается данным способом и с колоссальными трудностями остальными способами. Поэтому на начальной стадии изучения опасно начинать с графических приемов решения задач с параметром.

Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

Перейдем теперь к демонстрации указанных способов решения задач с параметром.

Задача 1. Для всех действительных значений параметра a решите уравнение $\mathbf{x^3-(2-a)x^2-ax-a(a-2)=0}$.

Решение. Исходное кубическое по x уравнение является квадратным относительно $\boldsymbol{a}$. Поэтому, считая переменную **x** параметром, перепишем это уравнение в виде стандартного квадратного уравнения относительно a, опуская промежуточные шаги по раскрытию скобок и перегруппировке:

$$\mathbf{a^2-(x^2-x+2)a - x^3 + 2x^2 = 0.}$$

Поскольку

$$\mathbf{x^2-x+2=x^2+(2-x)} \text{ и } \mathbf{-x^3+2x^2=x^2(2-x)},$$

то по обратной теореме Виета

$$\mathbf{a_1=x^2,\ a_2=2-x.}$$

Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\mathbf{a=x^2} \text{ и } \mathbf{a=2-x.}$$

Первое уравнение преобразуется к виду $\mathbf{x^2=a}$, откуда

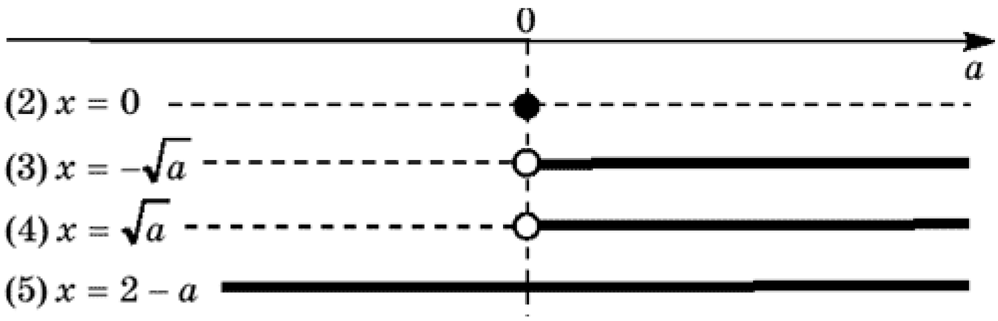
(1): при $\boldsymbol{a<0}$ решений нет;
(2): при $\boldsymbol{a=0}$ единственное решение $\mathbf{x=0}$; при $\boldsymbol{a>0}$ два решения
(3): $x = -\sqrt{a}$; (4): $x = \sqrt{a}$.

Второе уравнение совокупности имеет единственное решение (5): **x=2–*a*** для любого значения параметра ***a***.

Комментарий 1. Многие учащиеся, доведя решение до данного момента, испытывают трудности в формировании общего ответа. Приведем удобный прием представления полученных результатов для дальнейшего продвижения в решении задачи. Будем называть данный прием: «разверткой вдоль оси параметра».

Изображаем ось параметра ***a*** и отмечаем на ней граничные значения параметра, которые фигурируют в ответах к каждому уравнению совокупности. Все найденные решения уравнений для тех значений параметра ***a***, при которых хотя бы одно решение существует, выписываем в таблице слева (последовательно сверху вниз). Сплошной линией, параллельной оси параметра, указываем те промежутки значений параметра, при которых полученное решение существует. Заметим, что концы промежутков изображаются «светлыми» точками в случае, когда соответствующее решение не существует, а «темными» точками — в противном случае.

Таблица 1



Данная развертка позволяет легко найти все решения исходного уравнения для любого действительного значения параметра: ***x=2–a*** при ***a*<0**; **x=0** или **x=2** при ***a*=0;** $x = -\sqrt{a}$, или $x = \sqrt{a}$, или **x=2–*a*** при ***a*>0**.

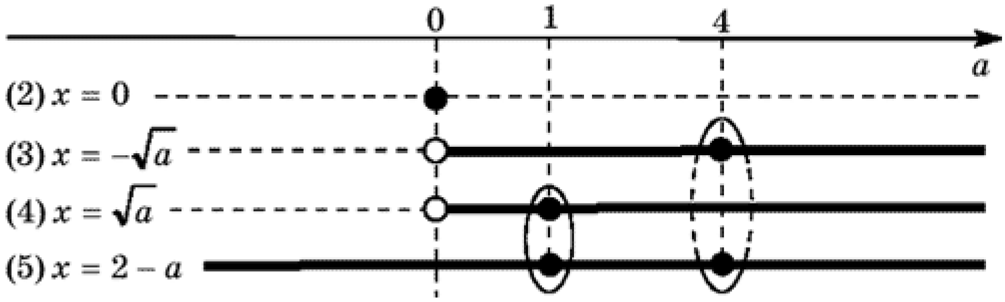
Комментарий 2. Возникает принципиальный вопрос: является ли приведенный выше ответ окончательным? С одной стороны, для поставленной задачи ответ можно считать окончательным, если допустить возможность повторения в ответе одного и того же решения в различном виде.

Например, при ***a* = 1** равенства $x = \sqrt{a}$, и **x = 2** – a определяют одно и то же значение переменной **x=1**, а при ***a*=4** равенства $x = -\sqrt{a}$, и **x=2–*a*** аналогично определяют одно значение **x=–2**. Однако оставлять подобные повторения без внимания обычно не принято, тем более, что при других, особенно популярных в последнее время постановках задач («Укажите количество различных корней данного уравнения в зависимости от параметра a» или «При каких значениях параметра a уравнение имеет одно решение?») игнорирование указанного обстоятельства приводит к неверному ответу.

Полученные равенства (2)–(5) могут при некоторых значениях параметра ***a*** определять одно и то же значение переменной **x**. Найдем указанные значения параметра. Поскольку значения $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$ – различны для всех $a>0$, осталось выяснить, при каких значениях а выполняются равенства $\sqrt{a} = 2 - a$ и $-\sqrt{a} = 2 - a$.

Пусть $\sqrt{a} = t$, тогда первое уравнение приводится к виду $t^2+t-2=0$, откуда $t=1$ и $t=-2$ (не подходит, так как $t = \sqrt{a} > 0$ при $a > 0$), т. е. $\sqrt{a} = 1,\ a = 1$. Аналогично решая второе уравнение, находим $a=4$.

Таблица 2



Полученный результат в таблице 2 проиллюстрирован следующим образом: линии равенства (4) и (5) «сливаются» при $a=1$, линии (3) и (5) «сливаются» при $a=4$.

Замечания. 1. При практическом использовании «развертки по параметру» таблицу 2 рекомендуем не воспроизводить, а полученные «слияния» изображать в таблице 1.

2. Для изолированных значений параметра естественно приводить числовые значения корней.

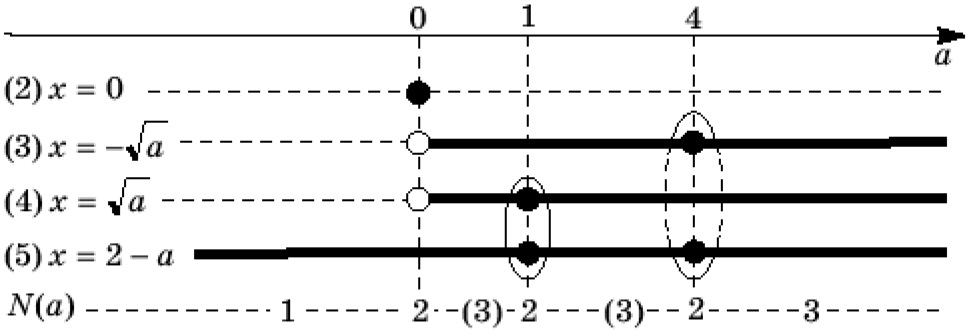
Используя таблицу 2, легко сформулировать окончательный ответ задачи.

Ответ: $x=2-a$ при $a<0$; $x_1=0$, $x_2=2$ при $a=0$;
$x_{1,2} = \pm\sqrt{a},\ x_3 = 2 - a$ при $0 < a < 1,\ 1 < a < 4,\ a > 4$;
$x_{1,2} = \pm 1$ при $a = 1$; $x_{1,2} = \pm 2$ при $a = 4$.

Задача 2. Для всех действительных значений параметра а найдите число различных корней уравнения $(a-x^2)(a+x-2)=0$.

Замечание. Очевидно, что решение предыдущего примера позволяет, в частности, получить ответ и на поставленный вопрос. Для этого в таблицу 2 удобно ввести еще одну строчку, соответствующую количеству различных корней по переменной х при данном значении параметра а (в дальнейшем будем обозначать указанное число различных корней через $N(a)$). В этом случае таблица 2 будет выглядеть следующим образом.

Таблица 3



Количество различных корней для каждого значения ***a*** совпадает с числом пересечений соответствующей вертикальной линии с приведенными ранее сплошными горизонтальными линиями (или «темными» точками) с учетом совпадений решений при найденных значениях параметра. Например, при ***a*=2** соответствующая вертикальная линия пересекает сплошные горизонтальные три раза, а при ***a*=4** она хотя и пересекает те же линии, но две из них «сливаются», поэтому при ***a*=4** количество различных корней равно двум, а не трем, т. е. **N(2)=3** и **N(4)=2.**

Ответ: уравнение имеет один корень при ***a*<0**; два корня — при ***a*=0**, ***a*=1**, ***a*=4**; три корня — при **0<*a*<1**, **1<*a*<4**, ***a* > 4**.

Укажем иной (достаточно популярный и эффективный) способ решения данной задачи, который с успехом может быть использован и при решении задач других типов (включая и задачи типа 1). Предлагаемый способ основан на рассмотрении множества точек плоскости с координатами (**x; *a***), для которых выполняются соответствующие уравнения. Это множество точек обычно называют графиком уравнения.

Решение. Исходное уравнение равносильно совокупности $a-x^2=0$ или $a+x-2=0$. Поэтому построение искомого множества точек — графика уравнения — сводится к построению графиков $a=x^2$ и $a=2-x$ (рис. 1).

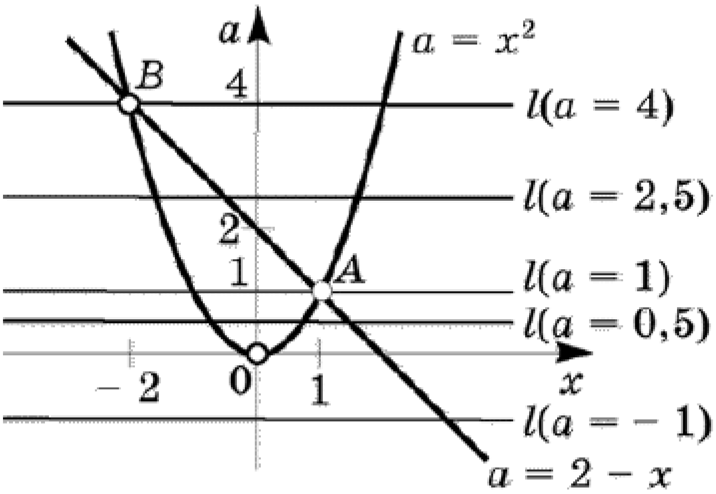


Рис. 1

Координаты точек пересечения графиков определяются как решение системы уравнений

$$\begin{cases} a - x^2 = 0, \\ a = 2 - x, \end{cases}$$

решив которую находим координаты (1; 1) точки A и (– 2; 4) — точки B.

Понятно, что все точки параболы и прямой (и только они) имеют координаты (**x**; ***a***), удовлетворяющие исходному уравнению. Поэтому количество различных корней уравнения по переменной **x** при каждом значении параметра $a=a_0$ совпадает с количеством точек пересечения прямой l, задаваемой равенством $a=a_0$, с построенным множеством точек.

Очевидно, что при $a<0$ прямая l лежит в нижней полуплоскости и пересекает график исходного уравнения (объединение точек параболы и прямой) в одной точке, т. е. $N(a)=1$ при $a<0$. При $a=0$ прямая l касается параболы $a=x^2$, т. е. имеет с ней одну общую точку и пересекает прямую $a=2–x$, поэтому $N(0)=2$. При дальнейшем возрастании параметра ***a*** от 0 до 1 (не включая значения 1) прямая l пересекает график уравнения в трех точках, откуда $N(a)=3$ при $0<a<1$. Аналогично получаем $N(1)=N(4)=2$ и $N(a)=3$ при $1<a<4$, $a>4$.

Ответ: $N(a)=1$ при $a<0$; $N(a)=2$ при $a=0$, $a=1$, $a=4$; $N(a)=3$ при $0<a<1$, $1<a<4$, $a>4$.

Комментарий. При решении рассмотренным способом задач типа 1 при данном значении параметра a_0 решениями уравнения являются абсциссы точек пересечения прямой $a=a_0$ с графиком уравнения.

Задача 3. При каких значениях параметра ***a*** уравнение $|x+2|=ax$ не имеет решений?

Решение 1. Для каждого значения параметра ***a*** решим данное уравнение, после чего отберем те значения параметра, при которых уравнение решений не имеет.

На основании определения модуля заключаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+2=ax, \\ x+2\ge 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -(x+2)=ax, \\ x+2<0, \end{cases} \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} (a-1)x=2, \\ x\ge -2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a+1)x=-2, \\ x<-2. \end{cases}$$

.

или

Первая система имеет одно решение $x=\dfrac{2}{a-1}$ при $\dfrac{2}{a-1}\geqslant -2,$ т. е. при $a\le 0$ или $a>1$ и не имеет решений при остальных значениях параметра. Вторая система имеет одно решение $x=-\dfrac{2}{a+1}$, если $-\dfrac{2}{a+1}<-2,$ т. е. при $-1<a<0$ и не имеет решений при остальных значениях параметра.

Объединяя решения систем, имеем: данное уравнение имеет одно решение

$x=\dfrac{2}{a-1}$ при $a\leqslant -1,$

$a\le –1$, $a=0$, $a>1$; два решения

$x = \frac{2}{a-1}$ и $x = -\frac{2}{a+1}$ при $-1 < a < 0$. Анализируя полученный результат, определяем значения параметра ***a***, при которых уравнение не имеет решений.

Ответ: **$0<a\le1$**.

Замечание. Мы привели здесь решение задачи в общем виде с целью повторной иллюстрации решения задач типа 1 (рекомендуем для анализа полученных решений составить таблицу «развертки вдоль оси параметра», табл. 1–3).

Может показаться, что приведенное решение не экономно и содержит много лишних ходов. Например, кажется естественным после получения совокупности двух систем сразу искать лишь те значения параметра, при которых не имеет решений каждая из систем, после чего найти значения параметра, при которых обе системы не имеют решений одновременно. Однако даже понимание того, что требуется проделать в этом случае, уже представляет собой определенную трудность для ряда учащихся. Сказанное, разумеется, не означает, что во всех аналогичных задачах целесообразно выходить на более общую постановку вопроса (выбор оптимального способа решения зависит от конкретной задачи).

Решение 2. Приведем еще один вариант использования графических представлений для решения задач с параметрами.

Как известно, число решений уравнения **f(x)=g(x)** совпадает с количеством точек пересечения графиков функций **y=f(x)** и **y=g(x)**, построенных в одной системе координат. Рассмотрим графики функций **y=|x+2|** и **y=*a*x** (рис. 2). График первой функции не зависит от параметра ***a***; график второй функции (правой части уравнения) принадлежит семейству прямых, проходящих через начало координат, — «подвижный» график. Поэтому искомые значения параметра ***a*** соответствуют тем прямым из указанного семейства, которые не пересекают график функции **y=|x+2|**.

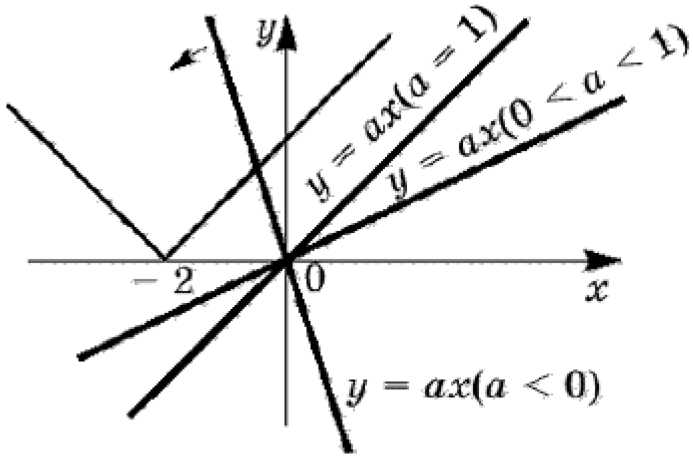


Рис. 2

При изменении параметра ***a*** от – ∞ до +∞ прямая y=*a*x поворачивается, начиная от «вертикального» положения «слева» от оси координат, против часовой стрелки вокруг начала координат. Очевидно, что при **$a\le0$** прямая **y=*a*x** пересекает по крайней мере один раз «неподвижный» график **y=|x+2|**; при дальнейшем возрастании параметра ***a*** до момента **$a=1$** (включительно) прямая не имеет общих точек с «неподвижным» графиком;

при $a>1$ у графиков снова появляется общая точка. Поэтому исходное уравнение не имеет решений при $0<a\le 1$.

Комментарий. В общем случае решение уравнений предложенным способом состоит в предварительном преобразовании уравнения к одному из видов: $f(x)=g(x;\ a)$ или $f(x;\ a)=g(x;\ a)$, после чего рассматриваются графики обеих частей уравнения в одной системе координат. При этом в первом случае изучается взаимное расположение «неподвижного» графика функции f и «подвижного» (в зависимости от параметра) графика функции g, а во втором случае оба графика «подвижны».

Выбор того или иного варианта предопределяется как возможностью приведения исходного уравнения к одному из видов, так и искусством работы с графиками того, кто решает данное уравнение.

Для сравнения решите самостоятельно известную задачу.

При каких значениях параметра a уравнение $x-a=2|2|x|-a^2|$ имеет ровно три различных корня?

Рассмотрите сначала графики функций $f_1(x;\ a)=x-a$ и $g_1(x;\ a)=2|2|x|-a^2|$, а затем графики функций $f_2(x)=x$ и $g_2(x;\ a)=2|\ 2|\ x|-a^2|+a$.

Ответ: $a=-2$, $a=-0{,}5$.

Задача 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $(a-x^2)(a+x-2)<0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2\le 1$.

Замечание. Ниже приводятся три решения данной задачи.

Первое из них традиционно для большинства учащихся (обычно решение такого рода называют прямым алгебраическим решением). Как правило, попытки подобного решения характерны и для начинающих овладевать методами решений задач с параметрами, и для «опытных бойцов», которых не смущает обилие технических трудностей.

Рекомендуем обратить самое пристальное внимание на второе решение, поскольку приводимый способ, во-первых, отличен от уже разобранных в настоящей статье и, во-вторых, его можно расценивать как достаточно самостоятельный и эффективный метод решения широкого класса задач с параметрами.

Третье решение проводится уже знакомым вам по примерам 2 и 3 графическим способам.

Решение 1. Множитель $(a-x^2)$ является квадратным трехчленом относительно x, который не имеет корней при $a<0$, имеет один корень при $a=0$ и имеет два различных корня при $a>0$. Второй множитель, линейный по переменной x, имеет один корень при любом значении параметра a. Поэтому в данной задаче целесообразно рассмотреть три случая.

Случай 1. Пусть $a<0$; тогда $a-x^2<0$ при любом x, а значит, исходное неравенство равносильно неравенству $a+x-2>0$, т. е. $x>2-a$.

Комментарий. В этот момент возникает основная логическая трудность, характерная для данного способа решения задач типа 4: определение тех значений параметра $a<0$, при которых найденное множество решений, зависящее от параметра, удовлетворяет условию задачи, т. е. не содержит ни одного решения неравенства $\mathbf{x^2 \le 1}$ (не содержит ни одного $\mathbf{x}$ из отрезка [– 1; 1]).

Так как полученное множество решений неравенства при $\boldsymbol{a<0}$ есть открытый луч ($\mathbf{2–x}$; $+\infty$), то, очевидно, данный луч не содержит точек отрезка [– 1; 1] тогда и только тогда, когда начало луча лежит «правее» отрезка либо совпадает с его правым концом, т. е. выполняется условие $\mathbf{2-a\ge 1}$, которое, очевидно, истинно при всех рассматриваемых значениях параметра $\boldsymbol{a<0}$.

Таким образом показано, что все значения параметра $\boldsymbol{a<0}$ удовлетворяют условию задачи, т. е. имеем «часть» общего ответа: $\boldsymbol{a<0}$.

Случай 2. Пусть $\boldsymbol{a=0}$. В этом случае исходное неравенство имеет вид $\mathbf{(-x^2)(x-2)<0}$, решая которое получим $\mathbf{x>2}$. Это означает, что значение параметра $\boldsymbol{a=0}$ удовлетворяет условию задачи: луч $\mathbf{(2; +\infty)}$ не содержит точек отрезка [– 1; 1], и мы имеем еще одну «часть» ответа: $\boldsymbol{a=0}$.

Комментарий. При разбиении решения задачи на случаи в зависимости от параметра рекомендуем все граничные значения параметра исследовать непосредственной подстановкой в исходное уравнение (неравенство, систему). Это полезно для промежуточного контроля решения задачи.

Случай 3. Пусть $\boldsymbol{a>0}$. Тогда неравенство можно переписать в виде

$$\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right)(x-(2-a))>0. \qquad (A)$$

Комментарий. Ясно, что при фиксированном значении а полученное неравенство легко решается методом интервалов, однако в нашем случае (и это характерно для задачи с параметрами!) процесс упорядочения корней по возрастанию выделяется в самостоятельный фрагмент решения.

Корень первого множителя $x_1=-\sqrt{a}$ при любом $\boldsymbol{a>0}$ меньше корня второго множителя $x_2=\sqrt{a}$. Корень третьего множителя $\mathbf{x_3=2-}\boldsymbol{a}$ в зависимости от $\boldsymbol{a}$ может находиться как на промежутке от $\mathbf{x_1}$ до $\mathbf{x_2}$, так и вне его (слева либо справа). Для определения возможных вариантов сравним $\mathbf{x_3}$ с $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$.

Вариант 1. Пусть $x_3<x_1$, т. е. $2-a<-\sqrt{a}$. Полученное неравенство решаем как квадратное относительно $t=\sqrt{a}$ ($\mathbf{t>0}$, так как в рассматриваемом случае $\boldsymbol{a>0}$): $\mathbf{t^2-t-2>0}$, откуда $\mathbf{t<-1}$ или $\mathbf{t>2}$; с учетом условия $\mathbf{t>0}$ получаем, что $\mathbf{t>2}$. Возвращаясь к параметру a, имеем неравенство $\sqrt{a}>2$, т. е. $\boldsymbol{a>4}$. Итак, для $\boldsymbol{a>4}$ справедливо соотношение **$x_3 < x_1 < x_2$**, следовательно, решая неравенство (А) методом интервалов (рис. 3), находим решения

$x_3 < x < x_1$, $x > x_2$, т. е. $2 - a < x < -\sqrt{a}, \quad x_1 > \sqrt{a}.$

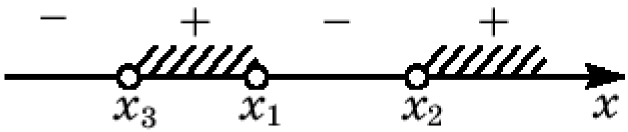


Рис. 3.

Полученное множество решений не содержит ни одной точки отрезка [– 1; 1] тогда и только тогда, когда отрезок [– 1; 1] расположен либо левее точки **$x_3 = 2 - a$**, либо между точками $x_1 = -\sqrt{a}$ и $x_2 = \sqrt{a}$. С учетом условия **$a > 4$** первая ситуация исключается, а вторая определяется системой неравенств $-\sqrt{a} \leqslant -1$ и $1 \leqslant \sqrt{a}$, которая выполняется для любого **$a > 4$**. В итоге приходим к выводу, что все значения параметра **$a > 4$** являются искомыми.

Вариант 2. Пусть **$x_3 = x_1$**, т. е. $2 - a = -\sqrt{a}$, откуда **$a = 4$** и неравенство (А), принимая вид **$(x+2)^2(x-2) > 0$**, имеет решение **$x > 2$**, которое не содержит точек отрезка [– 1; 1]. Следовательно, значение **$a = 4$** — искомое.

Вариант 3. Пусть $x_1 < x_3 < x_2$, т. е. $-\sqrt{a} < 2 - a < \sqrt{a}$. Решая соответствующую систему неравенств $t^2 - t - 2 < 0$, где $t = \sqrt{a}$ $(t > 0)$, получим, **$1 < t < 2$**, т. е. **$1 < a < 4$**. При найденных значениях параметра неравенство (А) имеет решение

$x_1 < x < x_3$, $x > x_2$, т. е. $-\sqrt{a} < x < 2 - a, \quad x > \sqrt{a}.$

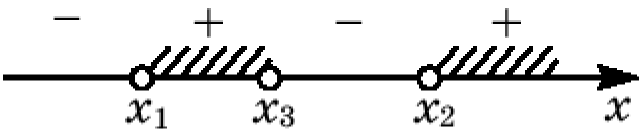


Рис. 4.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют те и только те значения параметра, при которых отрезок [– 1; 1] расположен либо левее точки $x_1 = -\sqrt{a}$, либо между точками $x_3 = 2 - a$ и $x_2 = \sqrt{a}$. Поскольку первая ситуация, очевидно, невозможна $(-\sqrt{a} < 0$ для любого $1 < a < 4)$, то искомые значения a определяются системой неравенств $2 - a \leqslant -1$ и $1 \leqslant \sqrt{a}$, **$a \geq 3$**. С учетом того, что в данном варианте рассматривались значения параметра ***a*** от 1 до 4, получаем **$3 \leq a < 4$**.

Вариант 4. Пусть $x_3 = x_2$, т. е. $2 - a = \sqrt{a}$, откуда a**=1** и неравенство (А) принимает вид **(x+1)(x–1)²>0**. Решением последнего неравенства (рис. 4) является объединение интервалов **(–1;1)** и **(1;+ ∞)**, в котором содержатся точки отрезка [– 1; 1]. Значит, изучаемое значение параметра a**=1** не удовлетворяет условию задачи.

Вариант 5. Пусть $x_3 > x_2$, т. е. $2 - a > \sqrt{a}$. Решив полученное неравенство (квадратное относительно $t = \sqrt{a}$), находим, что **–2<t<1**, т. е. **0<**a**<1** (напомним, что мы находимся в рамках случая 3, определяемого условием a**>0**). Неравенство (А) при полученных значениях параметра (рис. 5) имеет решение

$$x_1 < x < x_2, \quad x > x_3, \quad \text{т. е.} \ -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}, \quad x > 2 - a.$$

Найденное множество решений не содержит ни одной точки отрезка [– 1; 1] тогда и только тогда, когда этот отрезок расположен либо левее точки $x_1 = -\sqrt{a}$, либо между точками $x_2 = \sqrt{a}$ и $x_3 = 2 - a$. Ни та, ни другая ситуация невозможна ввиду неотрицательности арифметического квадратного корня. Следовательно, среди рассматриваемых значений параметра **0<**a**<1** нет искомых.

Итак, после рассмотрения всех пяти возможных вариантов получен ответ в случае 3: a**≥3**.

Таким образом, окончательный ответ задачи следующий: a**≤0,** a**≥3**.

Замечание к решению 1. При решении данным способом практически всегда возникает возможность продвигаться к поставленной цели с существенно меньшими затратами времени, что сопряжено, однако, с увеличением логических трудностей. Например, в случаев 3 ($a > 0$) нашего решения можно было рассуждать следующим образом.

Определив корни $x_1 = -\sqrt{a}, \ x_2 = \sqrt{a}, \ x_3 = 2 - a$ каждого множителя в неравенстве (А), замечаем, что при значении параметра a**<1** независимо от взаимного расположения корней в окрестностях корней $x_1 = -\sqrt{a}$ и $x_2 = \sqrt{a}$ всегда найдется хотя бы одно решение исходного неравенства из отрезка [– 1; 1] (поскольку при переходе через корни x_1 и x_2 левая часть неравенства (А) меняет знак), что не соответствует искомым значениям параметра a.

Следовательно, осталось рассмотреть значения параметра a**≥1**. Непосредственной проверкой легко убедиться, что значение a**=1** также не удовлетворяет условию задачи. При a>1 корень $x_1 = -\sqrt{a} < -1$, корень $x_2 = \sqrt{a} > 1$, а корень $x_3 = 2 - a < 1$. Поэтому большим корнем левой части неравенства (А) является x_2; значит, все значения x из интервала **(x_2;+ ∞)** не всегда являются решениями неравенства (А). Поэтому неравенство (А) не имеет ни одного решения из отрезка [– 1; 1] тогда и только тогда, когда $x_3 \le -1$ (независимо (!) от расположения корней x_1 и x_3, (рис. 5, 6).

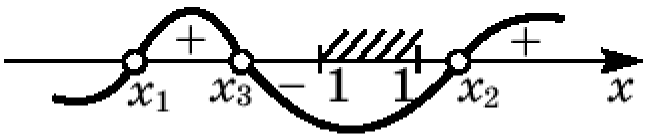


Рис. 5.

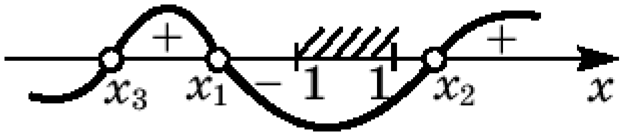


Рис. 6.

Итак, имеем $\mathbf{2–}\boldsymbol{a}\mathbf{\le–1}$, откуда $\boldsymbol{a}\mathbf{\ge3}$.

Решение 2. Основная идея решения: неравенство $(\boldsymbol{a} - \mathbf{x}^2)(\boldsymbol{a}+\mathbf{x}–2)<0$ будем рассматривать как неравенство относительно параметра a и исследовать полученный ответ (зависящий от x!) с целью получения искомых значений параметра $\boldsymbol{a}$.

Комментарий. Очевидно, сама идея рассматриваемого метода предопределяет ограничения по его использованию: во-первых, далеко не всегда возможно решить уравнение относительно параметра; во-вторых, в случае возможности такого решения не всегда целесообразно применение обсуждаемого способа в силу возникновения в дальнейшем серьезных технических и логических трудностей (оценка подобных трудностей приходит, естественно, с опытом решения такого рода задач).

Так как при любом $\mathbf{x}$ из отрезка **[– 1; 1]** справедливо соотношение $\mathbf{x}^2\le 2–\mathbf{x}$, то при данных x исходное неравенство как квадратное относительно $\boldsymbol{a}$ равносильно неравенству $a_1<a<a_2$, где $a_1=\mathbf{x}^2$, $a_2=2–\mathbf{x}$, т. е. имеем $\mathbf{x}^2<\boldsymbol{a}<2–\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in[–1; 1]$. (В)

Комментарий. Типичной трудностью при решении задач предлагаемым способом является осознание того, какому условию должны удовлетворять искомые значения параметра для вновь полученных уравнений (неравенств, систем).

В нашем случае задачу, равносильную исходной, можно сформулировать следующим образом.

При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ двойное неравенство $\mathbf{x}^2<\boldsymbol{a}<2–\mathbf{x}$ не имеет ни одного решения из отрезка **[–1;1]**?

Чтобы понять, как действовать дальше, нужно для конкретного значения параметра $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0$ уметь ответить на вопрос: почему значение $\boldsymbol{a}_0$ не является искомым? Очевидно, значение параметра $\boldsymbol{a}_0$ не является искомым, если существует хотя бы одно значение $\mathbf{x}_0$ из отрезка **[– 1; 1]**, при котором выполняется неравенство $\mathbf{x}_0^2<\boldsymbol{a}_0<2–\mathbf{x}_0$. Следовательно, значение параметра $\boldsymbol{a}$ является искомым тогда и только тогда, когда для любого x из отрезка **[– 1; 1]** либо $\boldsymbol{a}\le\mathbf{x}^2$, либо $\boldsymbol{a}\ge 2–\mathbf{x}$.

Найдем сначала все значения параметра a, для которых при любом x из отрезка **[– 1; 1]** имеет место неравенство $\boldsymbol{a}\le\mathbf{x}^2$. Понятно, что если $\boldsymbol{a}\le\mathbf{x}^2$ при любом x из отрезка **[– 1; 1]**, то это то же самое (!), что значение $\boldsymbol{a}$ не больше наименьшего значения функции $\mathbf{f(x)=x^2}$ на этом отрезке. Поскольку наименьшее значение функции $f(x)=x^2$ на отрезке **[– 1; 1]** равно **0**, получаем $a\le 0$.

Теперь осталось найти все значения параметра a, для которых при любом **x** из отрезка **[– 1; 1]** выполняется неравенство $a\ge 2-x$. По аналогии с предыдущими рассуждениями можно утверждать, что $a\ge 2-x$ для всех **x** из отрезка **[– 1; 1]** тогда и только тогда, когда a не меньше наибольшего значения функции $f(x)=2-x$ на отрезке **[–1;1]**. Поскольку наибольшее значение убывающей линейной функции $f(x)=2-x$ на отрезке **[– 1; 1]** равно ее значению в точке $x=-1$, т. е. равно 3, то искомые значения параметра $a\ge 3$.

Объединяя полученные ответы, приходим к окончательному ответу исходной задачи: $a\le 0$, $a\ge 3$.

Комментарий. Обращаем особое внимание на заключительный фрагмент решения задачи, который характерен для многих задач с параметрами: мы показали, что

$$\left[\begin{array}{l} a \le x^2 \\ a \ge 2-x \end{array}\right. \text{ для всех } x \in [-1;\,1] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le \min\limits_{-1\le x\le 1} x^2 = 0 \\ a \ge \max\limits_{-1\le x\le 1} (2-x) = 3. \end{array}\right.$$

Часто приходится иметь дело и с аналогичными задачами: «Найти все значения параметра a, при которых неравенство $a<f(x)$ (или неравенство $a>g(x)$) выполняется для любого **x** из заданного множества **X**». Подобная постановка вопроса у большинства учащихся вызывает серьезные затруднения.

Приводим ответ на поставленный вопрос.

1. Неравенство $a < f(x)$ выполняется для любого x из множества **X** тогда и только тогда, когда а меньше наименьшего значения **f(x)** на множестве **X** (если оно существует!), т. е.

$$(a < f(x) \text{ для любого } x \in X) \Leftrightarrow \left(a < \min\limits_{x\in X} f(x)\right).$$

2. Неравенство $a>g(x)$ выполняется для любого **x** из множества **X** тогда и только тогда, когда a больше наибольшего значения $g(x)$ на множестве **X** (если оно существует!), т. е.

$$(a > g(x) \text{ для любого } x \in X) \Leftrightarrow \left(a < \max\limits_{x\in X} g(x)\right).$$

На этом мы заканчиваем разбор отдельных примеров и в заключение особо выделим важные, по нашему мнению, соображения, которые необходимо учитывать учащемуся при овладении темой «Задачи с параметрами».

V. Заключительные рекомендации

1. Прежде чем приступить к решению задачи с параметрами, советуем разобраться в ситуации для конкретного числового значения параметра. Например, возьмите значение параметра $a=5$ и ответьте на вопрос: является ли данное значение $a=5$ искомым для задачи 4? Неудачная попытка получения ответа на поставленный вопрос, к сожалению,

означает вашу принципиальную неготовность решить задачу в общем виде. В этом случае необходимо срочно принять меры к овладению основными темами школьного курса математики. Заметим, что подстановка фиксированного значения параметра позволяет во многих случаях нащупать путь решения задачи.

2. Рекомендуем обратить ваше внимание на то, что при решении задач с параметрами особую роль играет обработка результатов, полученных на том или ином этапе решения. Одной из удобных, апробированных на практике форм организации результатов, является представление их в табличном виде (см. задачу 1). Советуем в первую очередь обратить внимание на эту рекомендацию тем, кто только начинает овладевать методами решения задач с параметрами.

.